

На правах рукописи

Корнилов Глеб Петрович

**ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ И СОБСТВЕННЫХ
ВОЛН ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ**

01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2006

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова — Ленина”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Даутов Рафаил Замилович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Лапин Александр Васильевич

кандидат физико-математических наук,
доцент Стребков Евгений Владимирович

Ведущая организация: Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Защита состоится 29 июня 2006 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.081.07 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 28 мая 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доцент

Агачев Ю. Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Оптические волноводы представляют собой диэлектрические цилиндрические структуры, по которым может распространяться электромагнитная энергия. Предполагается, что волновод является бесконечно длинным и находится в неограниченном пространстве с постоянной диэлектрической проницаемостью. Считается также, что диэлектрическая проницаемость волновода не меняется вдоль образующей цилиндра и является вещественной функцией поперечных координат. Собственными волнами называются электромагнитные поля без источников, которые могут распространяться вдоль волновода. Они описываются с помощью однородной системы уравнений Максвелла или скалярного уравнения Гельмгольца (“приближение слабонаправляющего волновода”).

Основная трудность в решении этих задач связана с тем, что они поставлены в неограниченной области — на всей плоскости \mathbb{R}^2 . Для их исследования и решения применяются методы интегральных уравнений, различные методы, основанные на сведении исходной задачи к задаче в ограниченной области на основе приближенных локальных краевых условий¹. Отметим, что теоретическое обоснование этих методов наталкивается на существенные трудности.

С начала 90-х годов получил распространение подход, основанный на использовании точных нелокальных краевых условий. Для уравнения Гельмгольца такие условия использовались А. С. Ильинским, В. В. Кравцовым, В.В. Ложечко, Ю.В. Шестопаловым, D. Givoli. Точные краевые условия позволяют свести исходную задачу в неограниченной области к эквивалентной задаче в ограниченной области. В этом направлении следует отметить работы Р. Joly, С. Poirier, Р. З. Даутова, Е. М. Карчевского. В них исходная задача (как скалярная, так и векторная) сводится к параметрической задаче на собственные значения в ограниченной области (круге) с нелинейным вхождением спектрального параметра в нелокальное краевое условие. Полученная задача решается методом конечных элементов. Однако, нелинейное вхождение спектрального параметра значительно усложняет решение зада-

¹см. Клеев А. И. Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (Обзор) / А. И. Клеев, А. Б. Маненков, А. Г. Рожнев // *Радиотехника и электроника*. — 1993. — Т. 11. — С. 1938–1968.

чи на собственные значения. В этой связи актуальным является построение численного метода, свободного от указанного недостатка.

Целью работы является построение, теоретическое и численное исследование приближенного метода определения дисперсионных кривых и собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов на основе точного краевого условия для задач как в скалярной, так и векторной постановках.

Методика исследования основывается на результатах теории компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, теории пространств Соболева, обобщенных решений краевых задач. Построение, обоснование численных методов базируется на теории метода конечных элементов.

Научная новизна. На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы:

1) эквивалентные формулировки задачи определения собственных волн цилиндрических диэлектрических волноводов в виде параметрической линейной спектральной задачи в круге как в скалярной, так и векторной постановках;

2) приближенные методы определения собственных волн и дисперсионных кривых цилиндрических диэлектрических волноводов для задач в скалярной и векторной постановках;

3) оценки точности предложенных приближенных методов;

4) оценки точности метода Галеркина с возмущениями для самосопряженной задачи на собственные значения $Au = \lambda Bu$ в гильбертовом пространстве.

Достоверность полученных в диссертации результатов подтверждается использованием общепринятых подходов к моделированию диэлектрических волноводов, строгими математическими доказательствами сформулированных утверждений, сравнением полученных результатов с известными в научной литературе соответствующими теоретическими и экспериментальными результатами других авторов, а также хорошим совпадением результатов приближенных вычислений с известными для ряда тестовых задач.

Научное и практическое значение работы. Работа носит, в основном, теоретический характер. Вместе с тем, разработан эффективный метод, позволяющий рассчитывать цилиндрические диэлектрические волноводы про-

извольного поперечного сечения. Применения рассматриваемого метода не ограничиваются задачей теории диэлектрических волноводов. Этим методом могут быть решены различные задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца на плоскости или системе уравнений Максвелла.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на всероссийских и международных конференциях: Международная молодежная школа-конференция “Iterative methods and matrix computations”, г. Ростов-на-Дону, 2–9 июня 2002 г.; II Молодежная научная школа-конференция “Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах”, г. Казань, 14–16 октября 2002 г.; III всероссийская молодежная научная школа-конференция “Лобачевские чтения–2003”, г. Казань, 1–4 декабря 2003 г.; Всероссийская конференция “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвященная 70-летию со дня рождения академика А.Ф. Сидорова (Екатеринбург, 3–7 февраля 2003 г.); II всероссийская молодежная научная школа-конференция “Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач”, г. Казань, 27 июня – 1 июля 2003 г.; 10 th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Dnepropetrovsk, Ukraine, Sept. 14–17, 2004; Пятый всероссийский семинар “Сеточные методы для краевых задач и приложения”, посвященный 200-летию Казанского государственного университета, г. Казань, 17–21 сентября 2004 г.; Шестой всероссийский семинар “Сеточные методы для краевых задач и приложения”, г. Казань, 1–4 октября 2005 г., а также представлялись на итоговых научных конференциях Казанского университета (2003–2006 г.г.).

В целом диссертация была доложена на совместном семинаре кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета и отдела вычислительной математики НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах их результаты принадлежат авторам в равной мере. Непосредственно автору принадлежит численная реализация рассмотренных в работе методов, проведение вычислительных экспериментов и анализ их результатов.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Библиография включает 63 наименования. Общий объем диссертации составляет 130 страниц, включая 4 таблицы и 23 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводятся математические модели линейно изотропного оптического волновода, в основе которых — система уравнений Максвелла. Через Ω_i обозначим поперечное сечение волновода, $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_i}$ (см. рис. 1). Диэлектрическая проницаемость волновода ϵ зависит от поперечных координат

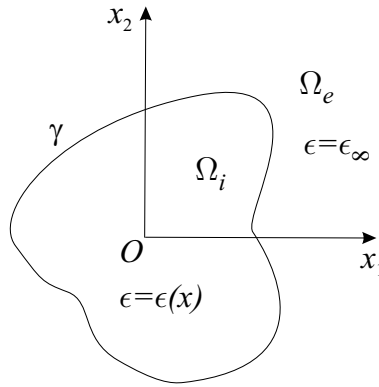


Рис. 1: Поперечное сечение волновода.

нат $x = (x_1, x_2)$, диэлектрическая проницаемость свободного пространства — ϵ_∞ считается постоянной, причем $\sup_{x \in \Omega_i} \epsilon(x) > \epsilon_\infty$. Магнитная проницаемость всюду постоянна и равна μ_0 .

Собственные волны волновода имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{H} \end{bmatrix}(x, x_3, t) = \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}(x) \exp(i(\omega t - \beta x_3)) \right).$$

Здесь \mathbb{E} , \mathbb{H} — векторы напряженностей электрического и магнитного полей; $E = (E_1, E_2, E_3)^T$ и $H = (H_1, H_2, H_3)^T$ — амплитуды этих векторов, исчезающие на бесконечности; неизвестные ω , β — частота колебаний и продольная постоянная распространения, соответственно. Введем операции div_β , ∇_β , rot_β , получающиеся из операций div , ∇ и rot заменой дифференцирования по x_3 умножением на $-i\beta$. Из уравнений Максвелла имеем систему:

$$\operatorname{rot}_\beta E = -i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{rot}_\beta H = i\omega\epsilon E, \quad (1)$$

откуда, в силу тождества $\operatorname{div}_\beta \operatorname{rot}_\beta(\cdot) = 0$, следует

$$\operatorname{rot}_\beta (\epsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H) = k^2 H, \quad \operatorname{div}_\beta H = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}_\beta (\operatorname{rot}_\beta E) = k^2 \epsilon E, \quad \operatorname{div}_\beta (\epsilon E) = 0, \quad (3)$$

где $k = \sqrt{\mu_0} \omega$ — продольное волновое число. На контуре γ векторные поля E и H удовлетворяют дополнительным соотношениям. Например,

$$[H]_\gamma = 0, \quad [\epsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H]_\gamma = 0, \quad [\operatorname{div}_\beta H]_\gamma = 0. \quad (4)$$

Здесь $[F]_\gamma$ — скачок функции F на γ . Для построения численного метода необходимо отдать предпочтение одной из систем уравнений (2) или (3). Для метода конечных элементов более подходящей является система (2), поскольку векторное поле H , в отличие от E , является непрерывным в \mathbb{R}^2 .

Задачу определения положительных параметров β , k и $H \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$ таких, что при условиях (4) в \mathbb{R}^2 справедливо уравнение

$$(\mathcal{P}_v) : \quad \operatorname{rot}_\beta (\epsilon^{-1} \operatorname{rot}_\beta H) - \epsilon_\infty^{-1} \nabla_\beta (\operatorname{div}_\beta H) = k^2 H, \quad H \neq 0,$$

назовем векторной задачей. Известно², что обобщенные решения этой задачи и задачи (2), (4) — совпадают. Отметим, что (\mathcal{P}_v) в области Ω_e сводится к уравнению Гельмгольца:

$$-\Delta H + p^2 H = 0, \quad p^2 = \beta^2 - k^2 \epsilon_\infty.$$

Параметр p называется поперечным волновым числом. Он определяет скорость затухания H на бесконечности и играет ключевую роль в дальнейшем.

Наряду с (\mathcal{P}_v) рассматривается также “приближение слабонаправляющего волновода” (скалярная задача):

$$(\mathcal{P}_s) : \quad u \in W_2^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\} : \quad -\Delta u + \beta^2 u = k^2 \epsilon u \quad \text{в } \mathbb{R}^2.$$

По скалярной функции u находится $H = (\mathbf{H}, -i\beta^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H})^T$, где $\mathbf{H} = (u, u)^T$.

Цель диссертации заключается в исследовании и разработке обоснованного приближенного метода решения задач (\mathcal{P}_s) и (\mathcal{P}_v) . Задача (\mathcal{P}_s) рассматривается во второй главе, (\mathcal{P}_v) — в третьей. Во введении также обсуждается

²см., напр., *A. Bamberger* Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber / *A. Bamberger, A. S. Bonnet* // *SIAM J. Math. Analys.* — 1990. — v. 21, no. 6. — pp. 1487–1510.

актуальность темы исследований, проводится обзор литературы, прилегающей к тематике диссертации.

Первая глава содержит результаты, необходимые для оценок точности схем метода конечных элементов, конструируемых во второй и третьей главах. В этой главе рассматривается метод Галеркина с возмущениями для абстрактной обобщенной задачи на собственные значения вида $Au = \lambda Bu$ в гильбертовом пространстве V с самосопряженным, положительно определенным оператором A и самосопряженным, компактным оператором B . На языке симметричных билинейных форм этих операторов исходная задача формулируется в виде: $a(u, v) = \lambda b(u, v)$ для любых $v \in V$. Свойства решений данной задачи хорошо известны. Отметим, что она эквивалентна задаче $Tu = \lambda^{-1}u$, где $T = A^{-1}B$ — самосопряженный компактный оператор в V_A (V_A есть пространство V , наделенное скалярным произведением $a(\cdot, \cdot)$).

Пусть $\{V_h\}_h$ — предельно плотная в V последовательность замкнутых подпространств, $h > 0$. Задача: найти $(\lambda^h, y) \in \mathbb{R} \times V_h \setminus \{0\}$ такие, что $a_h(y, v) = \lambda^h b_h(y, v)$ для любых $v \in V_h \subseteq V$ — представляет собой метод Галеркина с возмущениями для приближенного решения исходной задачи. Оценкам точности этого метода посвящено большое число работ. В пункте 1.3 диссертации приводится их краткий обзор.

Пусть (λ_k, U_k) — собственное число кратности r и соответствующее ему собственное подпространство исходной задачи, числа λ_i^h , $i = k, \dots, k + r - 1$, и U_k^h — аппроксимация этой собственной пары, полученная по методу Галеркина с возмущениями. Собственные числа предполагаются занумерованными по возрастанию с учетом кратности. Пусть

$$\Theta_V(U_k, U_k^h) = \max_{u \in U_k, \|u\|=1} \inf_{y \in U_k^h} \|u - y\|,$$

— раствор между U_k и U_k^h . Через P_h обозначим ортопроектор в V_A на V_h , т.е. $a(u - P_h u, v_h) = 0 \quad \forall u \in V_A, \forall v_h \in V_h$. Следующие функционалы характеризуют аппроксимативные качества форм a_h и b_h на V_h :

$$E_c(\varphi_h) = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|=1} |c(\varphi_h, v_h) - c_h(\varphi_h, v_h)|, \quad c = a, b.$$

При условии выполнения предположений:

$$(H_1) \quad V_h \subseteq V, \quad \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad \forall u \in V,$$

$$(H_2) \quad m_a \|v_h\|^2 \leq a_h(v_h, v_h) \leq M_a \|v_h\|^2, \quad m_a > 0,$$

$$(H_3) \quad \delta_h = \|T - P_h T\| + \sup_{f \in V_h, \|f\|=1} (E_b(f) + E_a(P_h T f)) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

в первой главе доказаны следующие оценки точности:

$$\Theta_V(U_k, U_k^h) \leq c \max_{u \in U_k, \|u\|=1} \varepsilon_h(u), \quad |\lambda_k - \lambda_i^h| \leq c \max_{u \in U_k, \|u\|=1} (\varepsilon_h^2(u) + \Sigma_h(P_h u)).$$

Здесь $\varepsilon_h(u) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| + E_a(P_h u) + E_b(P_h u)$, $u \in V$,

$$\Sigma_h(y) = |a(y, y) - a_h(y, y)| + |b(y, y) - b_h(y, y)|, \quad y \in V_h,$$

постоянная c зависит от λ , но не зависит от h ; $\|\cdot\|$ — норма в V . В случае положительно определенного оператора B подобные оценки точности были получены С. И. Соловьевым.

Вторая глава посвящена решению скалярной задачи (\mathcal{P}_s) . При каждом фиксированном $\beta > 0$ задача (\mathcal{P}_s) представляет собой линейную спектральную задачу на плоскости относительно параметра k^2 . Известно, что если (β, k, u) — решение этой задачи, то

$$(\beta, k) \in \Lambda, \quad \Lambda = \{(\beta, k) : \beta/\sqrt{\epsilon_+} < k < \beta/\sqrt{\epsilon_\infty}, \beta > 0\}.$$

Отметим, что в области Ω_e уравнение (\mathcal{P}_s) имеет вид

$$-\Delta u + p^2 u = 0, \quad p^2 = \beta^2 - k^2 \epsilon_\infty.$$

В силу того, что задача поставлена в неограниченной области \mathbb{R}^2 , она мало-пригодна для численного решения. В п. 2.1 задача (\mathcal{P}_s) эквивалентно сводится к задаче в ограниченной области Ω . Для этого плоскость \mathbb{R}^2 разбивается на две части: область $\Omega \supseteq \Omega_i$, с липшицевой границей Γ , и ее дополнение Ω_∞ , $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ (см. рис. 2). Рассматривается следующая спектральная задача в ограниченной области: найти $(\beta, p) \in \mathbb{R}_+^2$, а также $u \in W_2^1(\Omega) \setminus \{0\}$ такие, что

$$\mathcal{P} : \quad A(p)u = \beta^2 B u.$$

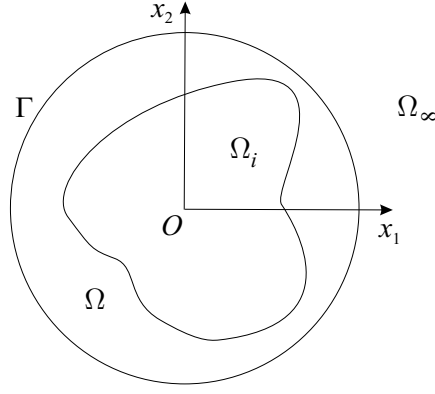


Рис. 2: Разбиение плоскости.

Здесь $A(p) = A_0(p) + S(p)$, (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $W_2^1(\Omega)$,

$$(A_0(p)u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + p^2 cuv) dx, \quad (Bu, v) = \beta^2 \int_{\Omega} duv dx,$$

$$(S(p), u, v) = \int_{\Omega_{\infty}} (\nabla u_p^{\infty} \cdot \nabla v_p^{\infty} + p^2 u_p^{\infty} v_p^{\infty}) dx,$$

u и v — произвольные функции из $W_2^1(\Omega)$, $c = \epsilon/\epsilon_{\infty}$, $d = c - 1$, $u_p^{\infty}, v_p^{\infty} \in W_2^1(\Omega_{\infty})$ — метагармонические продолжения в область Ω_{∞} функций u и v . Точнее, u_p^{∞} является обобщенным решением задачи

$$-\Delta u_p^{\infty} + p^2 u_p^{\infty} = 0, \quad x \in \Omega_{\infty}, \quad u_p^{\infty} = u, \quad x \in \Gamma.$$

Установлены свойства операторов $S(p)$, $A(p)$ и B , действующих в $W_2^1(\Omega)$. Показано, что $A(p)$ — самосопряженный, положительно определенный при $p > 0$ оператор, B — самосопряженный, неотрицательный, компактный. Доказана

Теорема 1. *Задачи (\mathcal{P}_s) и \mathcal{P} эквивалентны в следующем смысле: если (β, k, u) — обобщенное решение задачи (\mathcal{P}_s) , то $(\beta, p, u|_{\Omega})$ — решение \mathcal{P} при $p = \sqrt{\beta^2 - \epsilon_{\infty} k^2}$. Обратно: если (β, p, u) — решение задачи \mathcal{P} , то (β, k, u_p) — обобщенное решение (\mathcal{P}_s) при $k = \sqrt{(\beta^2 - p^2)/\epsilon_{\infty}}$. Здесь $u_p \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ совпадает с u на Ω и с u_p^{∞} вне Ω .*

В п. 2.2 исследована разрешимость задачи \mathcal{P} . Доказана

Теорема 2. *При любом $p > 0$ имеется счетное множество чисел $\beta_k(p)$, при которых задача \mathcal{P} имеет решение,*

$$0 < \beta_1(p) \leq \beta_2(p) \leq \dots \leq \beta_n(p) \leq \dots, \quad \beta_n(p) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Каждое $\beta_k(p)$ в этом ряду встречается конечное число раз, то есть имеет конечную кратность. Каждому числу $\beta_k(p)$, кратности $r_k \geq 1$, соответствует r_k -мерное пространство $U_k(p)$ такое, что $(\beta_k(p), p, u)$ — решение задачи \mathcal{P} при любом $u \in U_k(p)$. Других решений задача \mathcal{P} не имеет. Более того,

- a) $U_k(p)$ ортогональны в V_A ; $V_A = \bigoplus_{k=1}^{\infty} U_k(p) \oplus \ker B$,³
- b) функции $p \rightarrow \beta_k(p)$ и $p \rightarrow \beta_k^2(p) - p^2$ монотонно возрастающие и локально липшицевы, $k \geq 1$;
- c) если $k_0 = (\epsilon_+ / (\epsilon_+ - \epsilon_\infty))^{1/2}$, то $\frac{\beta_k(p)}{p} > k_0$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta_k(p)}{p} = k_0$, $k \geq 1$;
- d) $\beta_1(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$.

Здесь пространство V_A определяется как множество элементов из $W_2^1(\Omega)$, наделенных скалярным произведением $(A(p)u, v)$. Поскольку $(\beta, k) \in \Lambda$ и $p = \sqrt{\beta^2 - \epsilon_\infty k^2}$, то задача \mathcal{P} может иметь решение лишь при

$$(\beta, p) \in K, \quad K = \{(\beta, p) : 0 < p < \beta \sqrt{1 - \epsilon_\infty / \epsilon_+}, \beta > 0\}.$$

В п. 2.3 получен явный вид оператора $S(p)$ в том случае, когда область Ω представляет собой круг радиуса R , $R \geq R_0$ (далее это предполагается):

$$(S(p)u, v) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_{|n|}(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)}, \quad a_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Здесь $\mathbb{K}_n(z) = -zK'_n(z)/K_n(z)$, $K_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка n , (r, φ) — полярные координаты, $a_n(u)$ — коэффициент Фурье.

Параграф 2.4 посвящен исследованию гладкости собственных функций. Доказано, что если $\epsilon \in W_\infty^{m-1}(\mathbb{R}^2)$, $(\beta(p), p, u)$ — решение \mathcal{P} , то $u \in W_2^{m+1}(\Omega)$.

В п. 2.5 задача \mathcal{P} изучена при $p = 0$. Решения этой задачи — собственные числа β_i^0 , $i = 1, 2, \dots$ — называют точками отсечки. Доказано, что число решений задачи (\mathcal{P}_s) в обобщенной постановке при фиксированном $k > 0$ равно в точности $n(k)$, где $n(k) = \max\{i : \beta_i^0 / \epsilon_\infty^{1/2} < k, i = 1, 2, \dots\}$.

Параграф 2.6 посвящен приближенному решению задачи \mathcal{P} . Используется вариант метода Галеркина с возмущениями. Точнее, для дискретизации задачи используется метод конечных элементов, основанный на конформной аппроксимации V_h вещественного пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ (треугольные

³ \bigoplus означает прямую сумму подпространств.

криволинейные конечные элементы степени $m \geq 1$ с численным интегрированием). Наряду с численным интегрированием, дополнительное возмущение в метод Галеркина вносит усечение бесконечного ряда, входящего в определение оператора $S(p)$. Дискретная задача имеет вид: найти $(\beta_h, p) \in \mathbb{R}_+^2$ и $u_h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$\mathcal{P}_h : \quad a_h(p, u_h, v) = \beta^{h^2} b_h(u_h, v) \quad \forall v \in V_h.$$

Здесь $b_h(u, v) = S_h(duv)$,

$$a_h(p, u, v) = S_h(\nabla u \cdot \nabla v + p^2 c uv) + 2\pi \sum_{n=-N}^N \mathbb{K}_n(pR) a_n(u) \overline{a_n(v)},$$

$u, v \in V_h$, $S_h(\cdot)$ — составная квадратурная формула, индуцированная некоторой квадратурой на базисном элементе, точной на полиномах степени $2m-1$. Устанавливаются свойства форм $a_h(p, \cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$, на основе которых доказывается теорема существования решений задачи \mathcal{P}_h , являющаяся дискретным аналогом теоремы 2.

Пусть $(\beta_k(p), p, U_k(p))$ — решение задачи \mathcal{P} ; число $\beta_k(p)$ имеет кратность $r_k = \dim U_k(p)$: $\beta_{k-1}(p) < \beta_k(p) = \beta_{k+1}(p) = \dots = \beta_{k+r_k-1}(p) < \beta_{k+r_k}(p)$; $(\beta_i^h(p), u_i^h(p))$ — собственные пары \mathcal{P}_h , $i = 1, 2, \dots$; $U_k^h(p)$ является линейной оболочкой $\{u_i^h(p)\}_{i=k}^{k+r_k-1}$. В п. 2.7 на основе результатов 1-ой главы доказана

Теорема 3. Пусть $p > 0$, $\epsilon \in W_\infty^{2m}(\mathbb{R}^2)$, h — достаточно мало,

$$N \geq c_0 \ln(1/h), \quad c_0 = \frac{2m}{\ln(R/a)}, \quad R_0 < a < R.$$

Тогда для $i = k, \dots, k + r_k - 1$, $k \geq 1$ справедливы оценки

$$\Theta_V(U_k(p), U_k^h(p)) \leq c h^m, \quad |\beta_k(p) - \beta_i^h(p)| \leq c h^{2m}.$$

Третья глава диссертации посвящена решению векторной задачи (\mathcal{P}_v) . При фиксированном β эта задача представляет собой линейную задачу на собственные значения на плоскости относительно k^2 . Как и в скалярном случае, дискретный спектр локализован: $(\beta, k) \in \Lambda$.

Проясним характер зависимости задачи от параметра β . Для векторных

полей $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$, $H = (\mathbf{H}, H_3)^T$ на $D \subseteq \mathbb{R}^2$ положим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial H_2 / \partial x_1 - \partial H_1 / \partial x_2, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_1 / \partial x_1 + \partial H_2 / \partial x_2, \quad a_D(\beta; H, H') = \\ &= \int_D \left(\epsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}' + \epsilon_\infty^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H}' + \epsilon^{-1} \nabla H_3 \cdot \nabla H'_3 + \beta^2 \epsilon^{-1} H \cdot H' \right) dx, \\ b_D(H, H') &= \int_D \nu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' dx, \quad c_D(H, H') = \int_D \nu (\nabla H_3 \cdot \mathbf{H}' + \mathbf{H} \cdot \nabla H'_3) dx, \end{aligned}$$

где $\nu = \epsilon_\infty^{-1} - \epsilon^{-1}$. Пусть $(\mathbf{H}, H_3)^T$ — обобщенное решение задачи (\mathcal{P}_v) . Тогда, поле $H = (\mathbf{H}, iH_3)^T \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3 \setminus \{0\}$ удовлетворяет тождеству

$$(\mathcal{P}_\infty) : \quad a_{\mathbb{R}^2}(\beta; H, H') + \beta c_{\mathbb{R}^2}(H, H') - \beta^2 b_{\mathbb{R}^2}(H, H') = k^2 \int_{\mathbb{R}^2} H \cdot H' dx$$

для любого $H' \in [W_2^1(\mathbb{R}^2)]^3$. Здесь все формы являются вещественными.

В п. 3.1 получены эквивалентные постановки, сводящие задачу (\mathcal{P}_∞) сначала к нелинейной спектральной задаче в круге Ω радиуса R , а затем к линейной задаче на собственные значения в Ω . Сформулируем последнюю задачу, так как именно она служит основой построения численного метода.

Разобьем плоскость \mathbb{R}^2 на две части, как в скалярном случае (см. рис. 2). Пусть $V = W_2^1(\Omega)$ — вещественное пространство Соболева, $V^2 = V \times V$, $V^3 = V^2 \times V$. Определим при $p \geq 0$ операторы $\mathbf{A}(p)$, $\mathbf{B}_0 : V^2 \rightarrow V^2$, $\mathbf{C}_0 : V^2 \rightarrow V$, $L(p) : V \rightarrow V$, при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(p)\mathbf{H}, \mathbf{H}') &= \int_{\Omega} \left(\epsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}' + \epsilon_\infty^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H}' + p^2 \epsilon_\infty^{-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' \right) dx + \\ &+ \frac{2\pi}{\epsilon_\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_{|l|}(Rp) a_l(\mathbf{H}) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}')} + \epsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathbf{H}, \mathbf{H}'), \quad (L(p)H, H') = \\ &= \int_{\Omega} \left(\epsilon^{-1} \nabla H \cdot \nabla H' + p^2 \epsilon_\infty^{-1} H H' \right) dx + \frac{2\pi}{\epsilon_\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbb{K}_{|l|}(Rp) a_l(H) \overline{a_l(H')}, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{B}_0 \mathbf{H}, \mathbf{H}') = \int_{\Omega} \nu(x) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' dx, \quad (\mathbf{C}_0 \mathbf{H}, H') = \int_{\Omega} \nu(x) \mathbf{H} \cdot \nabla H' dx.$$

Здесь $H, H' \in V$, $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in V^2$ — произвольные функции; $a_l(H)$ — коэффициент Фурье; $\mathbf{C}_0^* : V \rightarrow V^2$ — оператор, сопряженный к \mathbf{C}_0 ; форма I_Γ на

достаточно гладких функциях определяется следующим образом:

$$I_{\Gamma}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} H_2' + \frac{\partial H_1'}{\partial \varphi} H_2 \right) \Big|_{r=R} d\varphi.$$

Положим $\mathbf{B}(p) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{C}_0^* L(p)^{-1} \mathbf{C}_0$.

Доказывается теорема, аналогичная теореме 1, об эквивалентности задачи (\mathcal{P}_{∞}) следующей спектральной задаче в круге Ω : найти $(\beta, p, H) \in \mathbb{R}_+^2 \times V^3$, $H = (\mathbf{H}, H_3)^T \neq 0$, удовлетворяющих системе уравнений

$$(\mathcal{P}) : \quad \mathbf{A}(p)\mathbf{H} = \beta^2 \mathbf{B}(p)\mathbf{H}, \quad H_3 = -\beta L^{-1}(p) \mathbf{C}_0 \mathbf{H}.$$

В п. 3.2 установлены свойства операторов $\mathbf{A}(p)$, $L(p)$ и $\mathbf{B}(p)$. В частности доказано, что оператор $\mathbf{A}(p)$ является самосопряженным и положительно определенным при любом $p > 0$, а $\mathbf{B}(p)$ — самосопряженным, неотрицательно определенным и компактным. На основе этих свойств в п. 3.3 исследована разрешимость задачи (\mathcal{P}) и, как следствие задачи (\mathcal{P}_{∞}) . А именно, доказана

Теорема 4. *При любом $p > 0$ имеется счетное множество чисел $\beta_k(p)$, при которых задача (\mathcal{P}) имеет решение,*

$$0 < \beta_1(p) \leq \beta_2(p) \leq \dots \leq \beta_n(p) \leq \dots, \quad \beta_n(p) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Каждое число $\beta_k(p)$ в этом ряду встречается конечное число раз, то есть имеет конечную кратность. Каждому числу $\beta_k(p)$, кратности $r_k \geq 1$, соответствует r_k -мерное пространство $U_k(p) = \{(\mathbf{H}, H_3)^T : \mathbf{H} \in \mathbf{U}_k(p), H_3 = -\beta L^{-1}(p) \mathbf{C}_0 \mathbf{H}\} \subset V^3$ такое, что $(\beta_k(p), p, H)$ — решение задачи (\mathcal{P}) при любом $H \in U_k(p)$. Других решений задача (\mathcal{P}) не имеет. Более того,

- a) $\mathbf{U}_k(p)$ ортогональны в $V_{\mathbf{A}}$; $V_{\mathbf{A}} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbf{U}_k(p) \oplus \ker \mathbf{B}(p)$;
- b) функции $p \rightarrow \beta_k(p)$, $p \rightarrow \beta_k^2(p) - p^2$ монотонно возрастающие и локально липшицевы, $k \geq 1$;
- c) $\beta_2(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$.

Здесь $V_{\mathbf{A}}$ определяется как V^2 со скалярным произведением $(\mathbf{A}(p)\cdot, \cdot)$.

В п. 3.4 задача (\mathcal{P}) изучена при $p = 0$. Как и в скалярном случае, доказано, что исходная задача (\mathcal{P}_{∞}) при фиксированном $k > 0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

Параграф 3.5 посвящен дискретизации задачи (\mathcal{P}) . При этом используются аппроксимация V_h пространства V и квадратурная формула $S_h(\cdot)$ такие же, как в скалярном случае. Определим $V_h^2 = V_h \times V_h$, $V_h^3 = V_h^2 \times V_h$, а также разреженные вещественные матрицы $\mathbf{A}_h^N(p)$, \mathbf{B}_{0h}^N , \mathbf{C}_{0h}^N и $L_h^N(p)$ — дискретные аналоги операторов $\mathbf{A}(p)$, \mathbf{B}_0 , \mathbf{C}_0 и $L(p)$ соответственно, полученные методом конечных элементов с численным интегрированием. Например, матрица $\mathbf{A}_h^N(p)$ определяется своей билинейной формой:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_h^N(p) \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}' = S_h \left(\epsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_h \operatorname{rot} \mathbf{H}'_h + \epsilon_\infty^{-1} \operatorname{div} \mathbf{H}_h \operatorname{div} \mathbf{H}'_h + p^2 \epsilon_\infty^{-1} \mathbf{H}_h \cdot \mathbf{H}'_h \right) + \\ + \frac{2\pi}{\epsilon_\infty} \sum_{l=-N}^N \mathbb{K}_{|l|}(Rp) a_l(\mathbf{H}_h) \cdot \overline{a_l(\mathbf{H}'_h)} + \epsilon_\infty^{-1} I_\Gamma(\mathbf{H}_h, \mathbf{H}'_h), \end{aligned}$$

где \mathbb{H} и \mathbb{H}' — векторы узловых параметров функций \mathbf{H}_h и \mathbf{H}'_h из V_h^2 , соответственно. Аналогично определяются остальные матрицы.

Дискретный аналог задачи (\mathcal{P}) имеет следующий вид: найти $(\beta^h, p, H) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^{3N_h}$, $H = (\mathbb{H}, \mathbb{H}_3)^T \neq 0$, такие, что

$$(\mathcal{P}_h) : \quad \mathbf{A}_h^N(p) \mathbb{H} = \beta^{h^2} \mathbf{B}_h^N(p) \mathbb{H}, \quad \mathbb{H}_3 = -\beta^h L_h^N(p)^{-1} \mathbf{C}_{0h} \mathbb{H}.$$

Здесь $\mathbf{B}_h^N(p) = \mathbf{B}_{0h} + \mathbf{C}_{0h}^T L_h^N(p)^{-1} \mathbf{C}_{0h}$; $N_h = \dim V_h$; H — вектор узловых параметров функции $H_h \in V_h^3$.

В п. 3.6 устанавливаются свойства матриц $\mathbf{A}_h^N(p)$ и $\mathbf{B}_h^N(p)$, на основе которых доказывается теорема существования решений задачи (\mathcal{P}_h) , являющаяся дискретным аналогом теоремы 4.

В п. 3.7 исследована точность описанного выше метода. Пусть $k \geq 1$, $(\beta_k(p), p, U_k(p))$ — решение задачи (\mathcal{P}) , $\beta_k(p)$ имеет кратность $r_k = \dim U_k(p)$; $(\beta_i^h(p), p, H_i^h(p))$, $i = 1, 2, \dots$ — линейно независимые решения (\mathcal{P}_h) ; $U_k^h(p)$ является линейной оболочкой $\{H_i^h(p)\}_{i=k}^{k+r_k-1}$. Доказана

Теорема 5. Пусть $\epsilon \in W_\infty^{2m}(\mathbb{R}^2)$, h достаточно мало, $N \geq c_0(p)h^{-1}$. Тогда $\Theta_{V^3}(U_k(p), U_k^h(p)) \leq ch^m$, $|\beta_k(p) - \beta_i^h(p)| \leq ch^{2m}$, $i = k, \dots, k + r_k - 1$.

Четвертая глава посвящена описанию результатов численных расчетов на основе простейшей схемы МКЭ ($m = 1$). Рассматривались волноводы с различной формой поперечного сечения Ω_i и с различными проницаемостями ϵ при $\epsilon_\infty = \mu_0 = 1$. В случае волновода кругового поперечного сечения

известно точное решение. На рис. 3 для векторной задачи изображены слева — зависимости β от p , справа — β от k , в случае, когда область Ω_i является кругом радиуса 1, $\epsilon = 2$. Такие зависимости называют дисперсионными кривыми. Вычисления проводились на сетке с $N_h = 2493$ узлами и числом Фурье-гармоник $N = 10$. Сплошными линиями обозначено точное решение, точками — приближенное, пунктирными линиями изображены границы областей K и Λ . Рисунок показывает совпадение точного и приближенного решений с графической точностью.

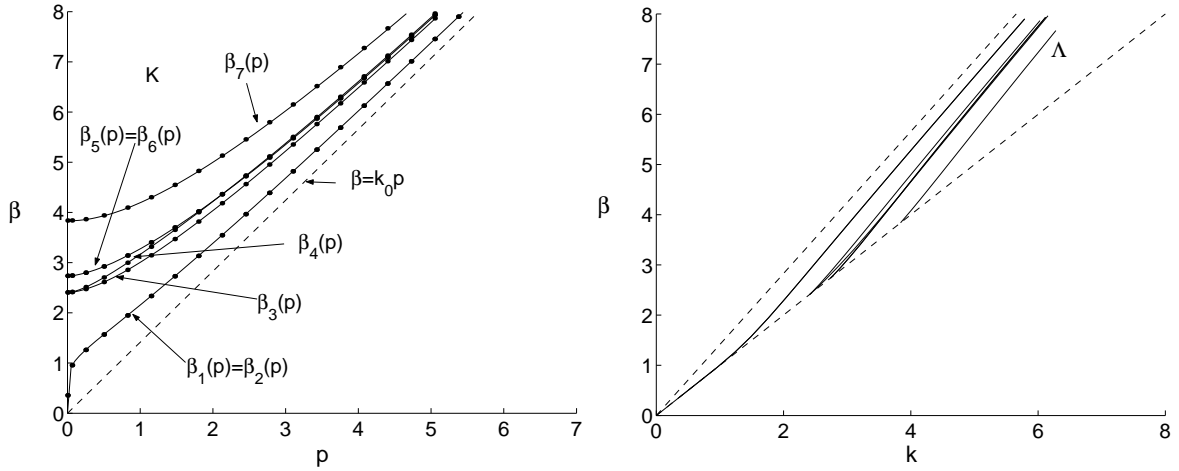


Рис. 3: Первые семь дисперсионных кривых $\beta = \beta(p)$ слева и $\beta = \beta(k)$ справа для кругового волновода.

Кроме кругового, были рассмотрены волноводы, поперечное сечение которых представляет собой единичный квадрат и прямоугольник. В этих случаях известны результаты физических экспериментов. На рис. 4 слева сплошными линиями показаны первые четыре дисперсионные кривые для прямоугольного волновода размера 1.5×1 с $\epsilon = 2.08$ ($N_h = 2179$, $N = 10$, $R = 1.5$). Экспериментальные данные обозначены точками. График показывает хорошее соответствие между полученными приближенными решениями и экспериментальными данными.

Для демонстрации универсальности метода были проведены расчеты однородного волновода, поперечное сечение которого состоит из трех касающихся друг друга кругов радиуса 0.4 с $\epsilon = 2$. Справа на рис. 4 изображены первые шесть дисперсионных кривых в этом случае ($N_h = 2226$, $N = 10$, $R = 1.5$).

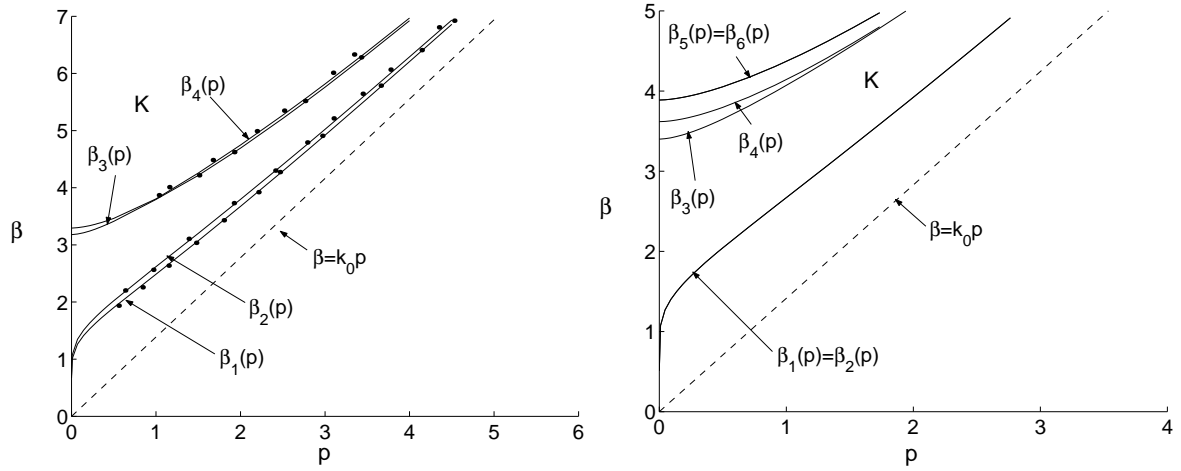


Рис. 4: Первые четыре дисперсионные кривые для прямоугольного волновода (слева) и первые шесть дисперсионных кривых для волновода с поперечным сечением, состоящим из трех касающихся друг друга кругов (справа).

Для каждого из указанных видов волноводов проводилось численное исследование зависимости точности метода от его параметров: N_h — общего числа точек сетки (n_Γ — число граничных узлов), N — числа Фурье-гармоник и R — радиуса круга. Так, в случае кругового волновода разыскивались все собственные значения β^h задачи (\mathcal{P}_h) при $p = 1$, принадлежащие промежутку $[0, 8]$, и затем сравнивались с точными. Результаты вычислений представлены в таблице 1 для β_4^h и $R = 1.5$. Из этой таблицы видно, что достаточно выбрать $N = 1$ или $N = 2$. При этом $|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4| \approx 0.7h^2$, что соответствует доказанной теоретической оценке точности.

$N \setminus N_h(n_\Gamma)$	45(16)	330(52)	1125(92)	2881(152)
1	0.64	0.748	0.631	0.668
3	0.641	0.748	0.631	0.668
5	0.641	0.748	0.631	0.668
7	0.641	0.748	0.631	0.668
15	0.642	0.748	0.631	0.668

Таблица 1: зависимость $e = h^{-2}|\beta_4 - \beta_4^h|/|\beta_4|$ при $p = 1$ от h и N .

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [1] *Kornilov, G. P.* A numerical method for the computation of guided modes in optical fibres / G. P. Kornilov // Iterative Methods And Matrix Computations, The International Summer School (Russia, Rostov-on-Don, June 2-9, 2002) / Ed. by G. H. Golub, L. A. Krukier. — Rostov State University, 2002. — Pp. 414–421.
- [2] *Даутов, Р. З.* Векторная задача о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский, Г. П. Корнилов // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Матер. II Молодежной научн. шк.-конф. «Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах». — Казань: Казанское математическое общество, 2002. — Т. 17. — С. 4–40.
- [3] *Даутов, Р. З.* Решение векторной задачи теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Г. П. Корнилов // Тез. докл. Всеросс. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — С. 28–29.
- [4] *Даутов, Р. З.* Метод нахождения дисперсионных кривых для векторной задачи теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Г. П. Корнилов // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Матер. II Всеросс. молодежной научн. шк.-конф. «Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач». — Казань: Казанское математическое общество, 2003. — Т. 20. — С. 102–118.
- [5] *Даутов, Р. З.* Метод нахождения дисперсионных кривых для скалярной задачи теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Г. П. Корнилов // Исследования по прикладной математике и информатике. Сборник научных статей. — Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2003. — Вып. 24. — С. 51–57.
- [6] *Корнилов, Г. П.* Методы решения векторной задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов / Г. П. Корнилов // Итоговая научная конференция студентов Казанского государственного

университета 2003 года. Тезисы докладов. — Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2003. — С. 99–100.

- [7] *Корнилов, Г. П.* Метод решения скалярной задачи теории диэлектрических волноводов / Г. П. Корнилов // Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Матер. III Всеросс. молодежной научн. шк.-конф. «Лобачевские чтения – 2003». — Казань: Казанское математическое общество, 2003. — Т. 21. — С. 136–139.
- [8] *Корнилов, Г. П.* Исследование внутренней сходимости метода решения векторной задачи теории диэлектрических волноводов / Г. П. Корнилов // Матер. V Всеросс. семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». — Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2004. — С. 125–129.
- [9] *Kornilov, G. P.* A new method for the computation of eigenmodes in dielectric waveguides / G. P. Kornilov, R. Z. Dautov, E. M. Karchevskii // Proc. of 10 th Int. Conf. on «Mathematical Methods In Electromagnetic Theory». — Dnepropetrovsk, Ukraine, 2004. — Pp. 266–268.
- [10] *Корнилов, Г. П.* Метод решения параметрической задачи на собственные значения на плоскости / Г. П. Корнилов, Р. З. Даутов // Матер. VI Всеросс. семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения». — Казань: Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, 2005. — С. 149–153.
- [11] *Даутов, Р. З.* Численный метод определения дисперсионных кривых и собственных волн оптических волноводов / Р. З. Даутов, Г. П. Корнилов, Е. М. Карчевский // *ЖВМ и МФ.* — 2005. — Т. 45, № 12. — С. 2203–2218.